4К

УДК 681.5

Л.В. Кравцова, А.В. Букетов, А.П. Пирог
Херсонская государственная морская академия, Украина
Украина, 73003, г. Херсон, пр. Ушакова, 20

Определение вероятностей напряженного состояния эпоксидных композитных материалов под воздействием статической нагрузки

L.V. Kravtsova, A.V. Buketov, A.P. Pirog
Kherson State Maritime Academy, Ukraine
Ukraine, 73003, c. Kherson, Ushakova av.,20

Determination of Probabilities Stress State of Epoxy Composite Materials under Static Load

Л.В. Кравцова, А.В. Букетов, А.П. Пірог
Херсонська державна морська академія, Україна
Україна, 73003, м. Херсон, пр. Ушакова, 20

Визначення вірогідності напруженого стану епоксидних композитних матеріалів під впливом статичного навантаження

Методом теории случайных процессов установлены вероятности пребывания системы в различных состояниях, построена матрица состояний системы при воздействии статической нагрузки на образец эпоксикомпозитного материала, наполненного частицами электрокорунда. Разработанная модель позволяет прогнозировать свойства и поведение композитных материалов под напряжением в процессе эксплуатации, что, в свою очередь, обеспечит надежность эксплуатации технологического оборудования в различных отраслях промышленности.
Ключевые слова: случайные процессы, прогнозирование свойств, вероятности состояний системы.

Using the theory of stochastic processes probability of the system being installed in various states, constructed matrix of the system states under the influence of the static load on the specimen epoxy material filled with particles fused. The developed model allows to predict the properties and behavior of composite materials under stress during the operation, which, in turn, ensure reliable operation of process equipment in various industries.
Key words: stochastic processes, prediction of the properties, probabilities of the states of the system.

Методом теорії випадкових процесів встановлена вірогідність перебування системи в різних станах, побудована матриця станів системи при дії статичного навантаження на зразок епоксикомпозитного матеріалу, наповненого частками електрокорунду. Розроблена модель дозволяє прогнозувати властивості і поведінку композитних матеріалів під напругою в процесі експлуатації, що, у свою чергу, забезпечить надійність експлуатації технологічного устаткування в різних галузях.
Ключові слова: випадкові процеси, прогнозування властивостей, ймовірності станів системи.

Постановка проблемы

Уровень развития современной науки и техники существенно зависит от внедрения новых материалов. Поэтому особенно актуальны исследования свойств эпоксидных композитных материалов (ЭКМ), которые являются лучшими заменителями тради-

ционных материалов во многих отраслях промышленности [1], [2]. Широкое использование ЭКМ стало причиной интенсивного исследования их физико-механических свойств и разработки методов их прогнозирования. Важнейшим фактором повышения эффективности производства в любой отрасли является улучшение управления процессами сшивки материалов и их функционирования под воздействием внешних статических и динамических напряжений.

Функционирование широкого класса систем можно представить как процесс перехода из одного состояния в другое под воздействием каких-либо причин. Применим один из эффективных математических методов теории случайных процессов, в частности, один из ее разделов – теория марковских процессов [3], [4] для решения задачи прогнозирования свойств полимерных композитов.

Анализ последних исследований и публикаций

При исследовании непрерывных и дискретных случайных цепей обычно пользуются графическим представлением функционирования системы. Граф состояний системы представляет собой совокупность вершин, изображающих возможные состояния системы S_i, и совокупность ветвей, изображающих возможные переходы системы из одного состояния в другое. Марковский случайный дискретный процесс, протекающий в системе S, характеризуется не только возможными состояниями, в которых система может пребывать случайным образом, но и теми моментами времени, в которые могут происходить ее переходы из состояния в состояние. Эти моменты времени могут быть заранее известны или случайны [5].

Случайный процесс, протекающий в системе, называется процессом с дискретным временем, если переходы системы из одного состояния в другое могут осуществляться только в заранее определенные моменты времени $t_1, t_2, \ldots t_k, \ldots$, называемые шагами этого процесса. В промежутках между соседними шагами система сохраняет свои состояния. Не исключается возможность, что на некоторых шагах система не изменит своего состояния.

Случайная последовательность называется марковской цепью, если для каждого шага вероятность перехода из любого состояния S_i в любое состояние S_j не зависит от того, когда и как система S оказалась в состоянии S_i.

Так как система S в любой момент t может пребывать только в одном из состояний $S_1, \ldots, S_n$, то при каждом $k = 1,2,\ldots$ события $S_1(k), \ldots, S_n(k)$ несовместны и образуют полную группу.

Цель исследования – определить вероятности состояний системы (эпоксидного композитного материала) при воздействии статической нагрузки.

Постановка задачи

На предварительном этапе в результате эксперимента получена зависимость абсолютной деформации от продолжительности воздействия статической нагрузки эпоксидного композита, содержащего 50 масс.ч. наполнителя (электрокорунд) на 100 масс.ч. эпоксидной смолы.

При исследовании ползучести ЭКМ использовали стандартную методику испытаний на изгиб по ГОСТ 4648-71 при экспериментально установленной статической нагрузке $F = 50\ Н$. Схема устройства для исследования ползучести материалов при-

ведена на рис. 1. Отметим, что исследовали материалы в течение времени τ = 72 ч, при этом определяли абсолютное значение прогиба образца под нагрузкой в конкретно определенные моменты времени. Параметры образцов: длина – l = 120 мм, ширина – b = 15 мм, высота – h = 10 мм.

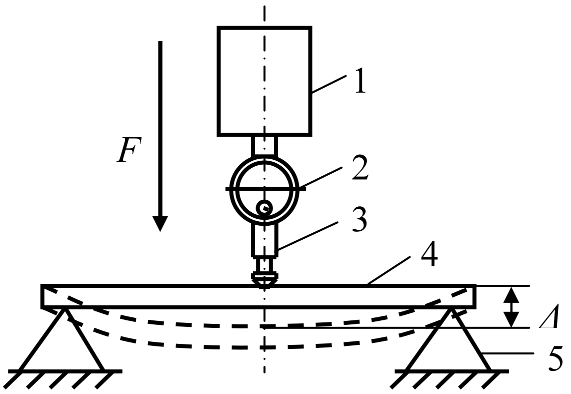


Рисунок 1 – Схема устройства для исследования ползучести материалов:
1 – несущая нагрузка; 2 – индикатор; 3 – идентор; 4 – образец; 5 – опора

Поставим задачу: найти вероятности состояний системы. Для решения этой задачи построим математическую модель исследуемого процесса.

Изменение абсолютной деформация (ΔL) под воздействием статической нагрузки ЭКМ во времени (t) позволяет установить следующую серию состояний: S_0– исходное состояние; S_1 – работоспособное состояние; S_2 – упругая деформация; S_3– пластичная деформация; S_4 – разрушение (табл. 1). Марковский случайный дискретный процесс, протекающий в системе S, характеризуется не только возможными состояниями, в которых система может пребывать случайным образом, но и теми моментами времени, в которые могут происходить ее переходы из состояния в состояние. Эти моменты времени могут быть заранее известны или случайны.

Таблица 1 – Зависимость абсолютной деформации от времени воздействия нагрузки ЭКМ

Параметр	Состояния системы														
	S0	***S1***		***S2***				***S3***							***S4***
t, ч	0,01	2	4	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72
$\Delta L \times 10^{-3}$, м	68	71	74	76	79	80	81	83	84	84,6	85	86	87	88	90

Очевидно, поставленная задача относится именно к марковской цепи, поэтому граф состояний может быть представлен в виде (рис. 2).

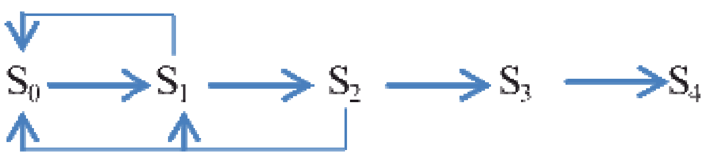


Рисунок 2 – Граф состояний системы

Основными характеристиками марковских цепей являются вероятности $p_i(k)=$ $=p(S_i(k))(i=1,...,n;k=1,2,...)$ событий $S_i(k)$. Вероятности $p_i(k)$ $(i=1,...,n;k=1,2,...)$ являются вероятностями состояний. Таким образом, вероятность *i* состояния на *k* шаге $p_i(k)$ является вероятностью того, что система *S* от *k* до (*k+1*) шага будет пребывать в состоянии S_i. Сумма вероятностей этих событий для каждого $k=1,2,...$ равна 1: $\sum_{i=1}^{n} p_i(k)=1, k=1,2,...$.

Пусть система *S* в момент *t* находится в состоянии S_r. Рассмотрим элементарный промежуток времени Δt, примыкающий к моменту *t*. Назовем плотностью вероятности перехода λ_{ij} из состояния *i* в состояние *j* (или инфинитезимальными коэффициентами) предел отношения вероятности перехода системы за время Δt из состояния S_i в состояние S_j к длине промежутка Δt:

$$\lambda_{ij}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{p_{ij}(t+\Delta t)-p_{ij}(t)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{p_{ij}(\Delta t)}{\Delta t},$$

где $P_{ij}(\Delta t)$ – вероятность того, что система, находившаяся в момент *t* в состоянии S_i, за время Δt перейдет из него в состояние S_j (плотность вероятностей перехода определяется только для $j\neq i$). Отсюда следует, что при малом Δt вероятность перехода (с точностью до бесконечно малых высших порядков) равна: $P_{ij}(\Delta t)=\lambda_{ij}\Delta t$.

Если все плотности вероятностей перехода λ_{ij} не зависят от *t* (от того, в какой момент начинается элементарный участок Δt), марковский процесс называется однородным, а если эти плотности зависят от времени, то он является неоднородным.

Запишем вероятности состояний в соответствии с графом состояний (рис. 2) в виде квадратной матрицы *n* порядка, сумма элементов каждой строки равна 1 (рис. 3).

Дискретный случайный процесс с дискретным временем, протекающий в системе, характеризуется тем, что система может переходить из одного состояния в другое только в заранее определенные моменты времени, называемые шагами.

Известно, что множество состояний системы марковской цепи определенным образом классифицируются с учетом дальнейшего поведения системы следующим образом [6].

	0	1	2	3	4
0	0	1	0	0	0
1	P_{10}	P_{11}	P_{12}	0	0
2	0	P_{21}	P_{22}	P_{23}	0
3	0	0	0	P_{33}	P_{34}
4	0	0	0	0	1

Рисунок 3 – Теоретическая матрица состояний

1 Невозвратное множество.

В случае невозвратного множества возможны любые переходы внутри этого множества. Система может покинуть это множество, но не может вернуться в него.

2 Возвратное множество.

В этом случае также возможны любые переходы внутри множества. Система может войти в это множество, но не может покинуть его.

3 Эргодическое множество.

В случае эргодического множества возможны любые переходы внутри множества, но исключены переходы из множества и в него.

4 Поглощающее множество.

При попадании системы в это множество процесс заканчивается.

Кроме описанной выше классификации множеств различают состояния системы:

а) существенное состояние: возможны переходы из S_i в S_j и обратно;

б) несущественное состояние: возможен переход из S_i в S_j, но невозможен обратный.

В некоторых случаях, несмотря на случайность процесса, имеется возможность до определенной степени управлять законами распределения или параметрами переходных вероятностей. Такие марковские цепи называются управляемыми [6].

Кроме того, с учетом наличия или отсутствия тех или иных упомянутых выше множеств состояний марковские цепи могут быть поглощающими, если имеется хотя бы одно поглощающее состояние, или эргодическими, если переходные вероятности образуют эргодическое множество.

Практически важным является вопрос о том, сколько шагов сможет пройти система до остановки процесса, то есть поглощения в том или ином состоянии.

Очевидно, согласно построенному графу состояний системы (1), состояния *S0, S1, S2* являются существенными состояниями, так как возможны переходы из S_i в S_j и обратно (i,j = 0,1,2); состояние *S3* является невозвратным множеством, так как система может покинуть это множество, но не может в него вернуться. Состояние *S4* является поглощающим множеством.

Вычислим вероятности состояний P_{ij}. Поскольку в данном случае воспользоваться классической формулой вероятности $P = m/n$ невозможно, определим вероятности состояний по частоте наблюдения того или иного значения наблюдаемого признака.

Определение вероятности по частоте наиболее широко применяется в науке и технике, когда не выполняются условия для непосредственного подсчета по формуле $P = m/n$. Частоту определяют по статистическим данным или по результатам специально проведенных опытов. В нашем случае находим число m (время наблюдения конкретного состояния), и общее число n (общее время наблюдения за процессом в тех же условиях); тогда вероятность состояния $P^* = m/n$.

По табл. 1 вычислим время t_i пребывания системы в каждом конкретном состоянии абсолютной деформации ΔL_i (табл. 2).

Таблица 2 – Время пребывания системы в различных состояниях при воздействии статической нагрузки ЭКМ

Параметр	Состояния системы														
	S0	***S1***		***S2***				***S3***							***S4***
$\Delta L_i \times 10^{-3}$, м	68	71	74	76	79	80	81	83	84	84,6	85	86	87	88	90
t_i, ч	0,01	2	2	2	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6

Если рассматривать весь процесс в целом, общее время наблюдения (суммарная частота) составляет t = 72 ч.

Обозначим t_i время пребывания системы в состоянии i, соответственно абсолютная деформация состояния ΔL_i.

Тогда вероятности состояний P_i абсолютной деформации ΔL_i за весь период наблюдения равны $p_i = \frac{\Delta t_i}{\sum t}$.

Результаты вычисления вероятностей состояний приведены в табл. 3.

Таблица 3 – Вероятности пребывания системы в состояниях *S0… S4*

Состояния системы	Параметры			
	$\Delta L_i \times 10^{-3}$, м	t, ч	Частота, Δ t ч	Вероятность
S0	68	0,1	0,1	0,0014
S1	71	2	1,9	0,02639
	74	4	2	0,0278
S2	76	6	2	0,0278
	79	12	6	0,0833
	80	18	6	0,0833
	81	24	6	0,0833
S3	83	30	6	0,0833
	84	36	6	0,0833
	84,6	42	6	0,0833
	85	48	6	0,0833
	86	54	6	0,0833
	87	60	6	0,0833
	88	66	6	0,0833
S4	90	72	6	0,0833

Поскольку процесс марковский, будем рассматривать отдельные этапы перехода процесса из одного состояния в другое, т.е. каждый этап будет представлять смежные состояния: *S0*, *S1*, *S2* (первый этап, восстанавливаемая деформация); *S1*, *S2*, *S3* (второй этап, переход в пластичную деформацию); *S3*, *S4* (третий этап, невосстанавливаемая деформация). Три смежных состояния (*S0*, *S1*, *S2*) наблюдаем в течение t = 24 ч; деформацию ΔL_1 наблюдаем с вероятностью 0,04167; деформацию ΔL_2 – с вероятностью 0,07917 и т.д. (табл. 4). Так как эти события независимы (в каждый момент времени система находится только в одном состоянии), вероятность каждого из состояний вычисляем как сумму вероятностей составляющих этого состояния (табл. 4).

Таблица 4 – Вероятности пребывания системы в состояниях *S0… S2*

Состояния системы	Параметры				
	$\Delta L_i \times 10^{-3}$, *м*	t, *ч*	Частота, *ч*	Вероятность	Сумма вероятностей в состояниях
S0	68	0,1	0,1	0,04167	0,04167
S1	71	2	1,9	0,07917	0,1625
	74	4	2	0,0833	
S2	76	6	2	0,0833	0,8333
	79	12	6	0,25	
	80	18	6	0,25	
	81	24	6	0,25	

График зависимости абсолютной деформации от продолжительности воздействия статической нагрузки представлен на рис. 4



Рисунок 4 – График зависимости абсолютной деформации от продолжительности воздействия статической нагрузки

Аналогично вычислим вероятности состояний третьей и четвертой строк матрицы состояний (табл. 5, табл. 6) и построим графики зависимости деформации (рис. 5, рис. 6).

Таблица 5 – Вероятности пребывания системы в состояниях *S1… S3*

Состояния системы	Параметры				
	$\Delta L_i \times 10^{-3}$, м	t, ч	Частота, ч	Вероятность	Сумма вероятностей в состояниях
S1	71	2	1,9	0,02883	0,05918
	74	4	2	0,030349	
S2	76	6	2	0,03035	0,30349
	79	12	6	0,091047	
	80	18	6	0,09105	
	81	24	6	0,09105	
S3	83	30	6	0,0909	0,6364
	84	36	6	0,0909	
	84,6	42	6	0,0909	
	85	48	6	0,0909	
	86	54	6	0,0909	
	87	60	6	0,0909	
	88	66	6	0,0909	

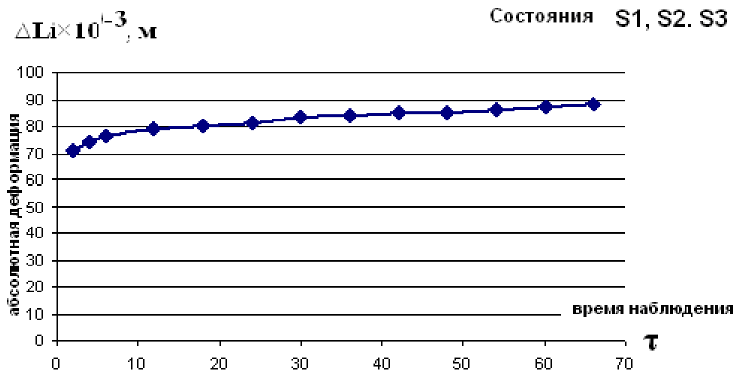


Рисунок 5 – График зависимости абсолютной деформации от продолжительности воздействия статической нагрузки

Таблица 6 – Вероятности пребывания системы в состояниях *S3… S4*

Состояния системы	Параметры				
	$\Delta L_i \times 10^{-3}$, м	*t*, ч	Частота, ч	Вероятность	Сумма вероятностей в состояниях
S3	83	30	6	0,125	0,875
	84	36	6	0,125	
	84,6	42	6	0,125	
	85	48	6	0,125	
	86	54	6	0,125	
	87	60	6	0,125	
	88	66	6	0,125	
S4	90	72	6	0,125	0,125

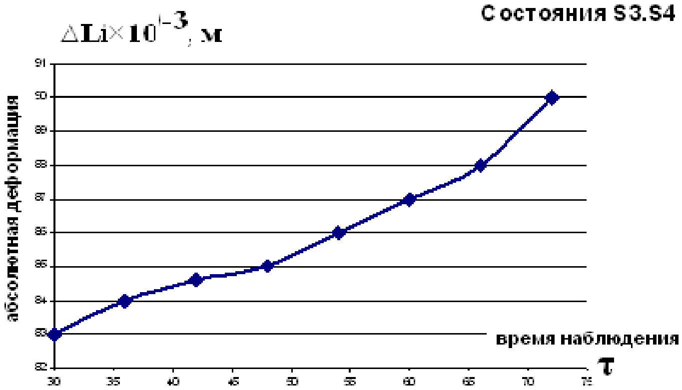


Рисунок 6 – График зависимости абсолютной деформации от продолжительности воздействия статической нагрузки

Таким образом, запишем матрицу состояний (табл. 7).

Таблица 7 – Матрица состояний системы при воздействии статической нагрузки ЭКМ

	S0	*S1*	*S2*	*S3*	*S4*	Сумма
S0	*0*	*1*	*0*	*0*	*0*	*1*
S1	*0,04167*	*0,1625*	*0,8333333*	*0*	*0*	*1*
S2	*0*	*0,05918*	*0,30349*	*0,63733*	*0*	*1*
S3	*0*	*0*	*0*	*0,875*	*0,125*	*1*
S4	*0*	*0*	*0*	*0*	*1*	*1*

Для получения более полной характеристики состояний системы вычислим математические ожидания деформации под воздействием статической нагрузки ЭКМ, а также дисперсию, т.е. разброс относительно наиболее ожидаемых значений Деформации. Как известно [6], математическим ожиданием (средним значением) случайной величины X, заданной на дискретном вероятностном пространстве, называется число $m = M[X] = \sum x_i p_i$. Результаты вычисления математического ожидания состояний каждого этапа марковской цепи приведены в табл. 8.

Таблица 8 – Математическое ожидание состояний марковской цепи

Состояния системы	Математическое ожидание, *M(X)*	Дисперсия, *D(X)*
S0… S4	$83{,}43472\times10^{-3}$ м	$12{,}40907\times10^{-3}$ м
S0… S2	$78{,}40417\times10^{-3}$ м	$9{,}29915\times10^{-3}$ м
S3	$82{,}86039\times10^{-3}$ м	$15{,}9587\times10^{-3}$ м
S4	$85{,}95000\times10^{-3}$ м	$4{,}6175\times10^{-3}$ м

Полученные значения имеют следующий смысл. При воздействии статической нагрузки $F = 50\ H$ в композитах, содержащих 50 масс.ч. наполнителя электрокорунда на 100 масс.ч. эпоксидной смолы на первом этапе *S0…S2* в течение $t = 24$ ч наиболее вероятна абсолютная деформация $M(X) = 78{,}4\times10^{-3}$ м с дисперсией $D(X) = 9{,}3\times10^{-3}$; при воздействии этой же статической нагрузки в течение $t = 60$ ч наиболее вероятна абсолютная деформация $M(X) = 82{,}9\times10^{-3}$ м с дисперсией $D(X) = 15{,}96\times10^{-3}$; при воздействии от 30 до 72 часов наиболее вероятна абсолютная деформация $M(X) = 86\times10^{-3}$ м с дисперсией $D(X) = 4{,}6\times10^{-3}$.

Литература

1. Kelley C.T. Iterative Methods for Optimization / Kelley C.T. – SIAM. – 1999. – 188 p.
2. Толстых В.К. Прямой экстремальный подход для оптимизации систем с распределенными параметрами / Толстых В.К. – Донецк : Изд. «Юго-Восток», 1997. – 177 с.
3. Tolstykh V.K. Minimithing in Hilbert Spaces / V.K. Tolstykh // Abs. Sump. Operations Research. – Passau-Germany : Springer, 1995. – P. 45.
4. Толстых В.К. Эффективный метод оптимизации физических процессов / В.К. Толстых // Инженерно-физический журнал. – 2003. – № 2, Т. 76. – С.160-162.
5. Tolstykh V.K. Optimal control by heat flow in continuous casting steel / V.K. Tolstykh, N.A. Volodin/ - Proc. Sump. Operations Research, Braunschweig, Germany,1996. – P. 480-483.
6. Володин Н.А. Развитие теоретических основ оптимизации и идентификации параметров в слитках и отливках / Н.А. Володин, В.К. Толстых – Донецк : ИПИИ «Наука і освіта». – 2008. – 132 с.
7. Процессы литья / [Бородин В.С., Мешков В.М., Петренко Л.П., Гридин С.В.].–1992. – №3. – С. 29-32.

Literatura

1. Kelley C. T. Iterative Methods for Optimization. – SIAM. – 1999. – 188.
2. Tolstykh V.K. Direct extreme approach for optimization of the systems with the up- diffused parameters. Donetsk: A publ. is «Southeast»,1997. – S. 177.
3. Tolstykh V.K. Minimithing in Hilbert Spaces // Abs. Sump. Operations Research. – Passau-Germany : Springer. – 1995. – S. 45.
4. Tolstykh V.K. Effective method of optimization of physical processes. – Inzhenerno-fizicheskiymagazine. – № 2, T. 76. – 2003. – S. 160-162.
5. Tolstykh V.K. Optimal control by heat flow in continuous casting steel / V.K. Tolstykh, N.A. Volodin // Proc. Sump.Operations Research, Braunschweig, Germany,1996. – S. 480-483.
6. Volodin N.A. Development of theoretical bases of optimization and authentication of parameters in bars and foundings / N.A. Volodin, V.K. Tolstykh. – Donetsk : IPII «Science and education».– 2008. – S. 132.
7. Processes of casting / [Borodin V.S., Meshkov V.M., Petrenko L.P., Gridin S.V.]. – 1992.– № 3. – S. 29-32.

RESUME

L.V. Kravtsova, A.V. Buketov, A.P. Pirog

Determination of Probabilities Stress State of Epoxy Composite Materials under Static Load

In using the theory of Markov processes a method for predicting changes in the properties of polymer composites when exposed to static load.

At the preliminary stage of the experiment produced a priori information about the change of material properties as a function of absolute deformation of the duration of exposure to static load of epoxy composite. Analysis of the results allowed us to establish the spectrum of states of the system and construct a graph of a discrete Markov random process.

Using the theory of stochastic processes probability of the system being installed in various states, constructed matrix of the system states under the influence of the static load on epoksikompozitny material filled with particles fused. The developed model allows to predict the properties and behavior of composite materials under stress during the operation, which, in turn, ensure reliable operation of process equipment in various industries.

Статья поступила в редакцию 15.04.2013.